1. En un bolillero hay cinco bolillas numeradas del 0 a 4. Se extraen con reposición dos bolillas. Sean B_1 y B_2 los números obtenidos. Se definen las siguientes variables aleatorias

$$X := \begin{cases} B_1 & \text{si } B_1 \text{ es impar} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$Y := \begin{cases} 1 & \text{si } B_1 + B_2 \leq 2 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

   (a) Encontrar $\mathbb{E}[X|Y]$.

   (b) Encontrar $\mathbb{E}[X]$.

2. Una prueba de tipo Opción Múltiple tiene tres preguntas: dos teóricas y una práctica, cada una con cinco posibles respuestas, y solo una de ellas es correcta. Suponga que un alumno no estudió nada y decide contestar las tres preguntas seleccionando al azar sus respuestas. Sean las variables aleatorias:

$$X := \text{ cantidad de preguntas bien contestadas },$$

   y

$$Y := \begin{cases} 1 & \text{si contestó mal la pregunta práctica,} \\ 0 & \text{si contestó bien la pregunta práctica.} \end{cases}$$

   Encontrar $\mathbb{P}_X$, $\mathbb{P}_Y$,$\mathbb{P}_{X|Y}$, $\mathbb{P}_{Y|X}$, $\mathbb{P}_{(X,Y)}$.

3. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ vs. as. tales que $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{i}$ y sea N una v.a. discreta independiente de las anteriores tal que $\mathbb{P}_N(i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, ..., n$. Definimos:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbf{1}_{\{N=i\}}$$

   (a) Encontrar $\mathbb{E}[X|N]$.

   (b) Encontrar $E[X]$.

4. Se elige una persona al azar en la población. Sean

$$X := \begin{cases} 1 & \text{si la persona elegida es hombre,} \\ 0 & \text{si la persona elegida es mujer.} \end{cases}$$

$$Y := \text{ altura de la persona elegida al azar }.$$

   Supongamos que

   - $\mathbb{P}(X = 1) = 0,52$.
   - $Y|_{X=0} \sim N(160, 36)$

- $Y|_{X=1} \sim N(175, 25)$

Hallar F_Y, $\mathbb{E}[Y]$, V[Y].

RESOLUCIÓN

1. (a) Primero calculamos las probabilidades de X e Y

$X \setminus Y$	0	1	p_X
0	$\frac{11}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{15}{25}$
1	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$
3	$\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$
p_Y	$\frac{19}{25}$	$\frac{6}{25}$	

Dada la definición de esperanza condicional

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_{x\in\mathbf{R_X}} x\mathbb{P}(X=x|Y=y) = \frac{\sum\limits_{x\in\mathbf{R_X}} x\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)},$$

usamos la tabla anterior para calcular

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y=0] &= \frac{0\,\mathbb{P}(X=0,Y=0) + 1\,\mathbb{P}(X=1,Y=0) + 3\,\mathbb{P}(X=3,Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} \\
&= \frac{1\,\frac{3}{25} + 3\,\frac{5}{25}}{\frac{19}{25}} = \frac{18}{25}\,\frac{25}{19} \\
&= \frac{18}{19}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y=1] &= \frac{0\,\mathbb{P}(X=0,Y=1) + 1\,\mathbb{P}(X=1,Y=1) + 3\,\mathbb{P}(X=3,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} \\
&= \frac{1\,\frac{2}{25} + 3\,\frac{0}{25}}{\frac{6}{25}} = \frac{2}{25}\,\frac{25}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(b) Sabemos que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|Y=0]\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{E}[X|Y=1]\mathbb{P}(Y=1) \\
&= \frac{18}{19}\frac{19}{25} + \frac{2}{6}\frac{6}{25} = \frac{18}{25} + \frac{2}{25} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Nota: *Es lo mismo que hacer*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 0\mathbb{P}(X=0) + 1\mathbb{P}(X=1) + 3\mathbb{P}(X=3)\\ &= 1\frac{5}{25} + 3\frac{5}{25}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

2. Podemos escribir $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$, con

$$X_1 := \begin{cases} 1 & \text{si contestó bien la primera pregunta teórica} \\ 0 & \text{si contestó mal la primera pregunta teórica} \end{cases},$$

$$X_2 := \begin{cases} 1 & \text{si contestó bien la segunda pregunta teórica} \\ 0 & \text{si contestó mal la segunda pregunta teórica.} \end{cases}$$

e $X_3 = 1 - Y$. Notemos que $X_i \sim Be(1/5)$, y por lo tanto $X \sim Bi(3, 1/5)$ e $Y \sim Be(4/5)$. Calculemos la probabilidad conjunta $\mathbb{P}_{(X,Y)}$:

$X \setminus Y$	0	1	p_X
0	0	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$
1	$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2$
2	$\frac{8}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$\frac{12}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2$
3	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	0	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$
p_Y	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	

Usando esto, calculemos $\mathbb{P}_{X|Y}$, sabiendo que $\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$.

$Y \setminus X\|Y$	0	1	2	3
0	0	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$
1	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$	0

y análogamente, como $\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \dfrac{\mathbb{P}(Y = y, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)}$,

$X \setminus Y\|X$	0	1
0	0	1
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	1	0

3. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|N=k] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbf{1}_{\{N=i\}} \middle| N=k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbf{1}_{\{k=i\}} \middle| N=k\right] \\ &= \mathbb{E}[X_k|N=k] = \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{k},\end{aligned}$$

donde la anteúltima igualdad se debe a que N es independiente de las vs. as. X_i, $i = 1, ..., n$.

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N=k]] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X|N=k]\mathbb{P}(N=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(Y \le y|X=0)\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(Y \le y|X=1)\mathbb{P}(X=1) \\ &= F_0(y)0.48 + F_1(y)0.52,\end{aligned}$$

donde F_0 es la función de distribución de una variable Z_0 que se distribuye $N(160, 36)$, y F_1 es la función de distribución de una variable Z_1 que se distribuye $N(175, 25)$. De aquí podemos calcular también

$$f_Y(y) = 0.48 f_0(y) + 0.52 f_1(y).$$

Calculemos ahora $\mathbb{E}[Y]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= 0.48\int_{-\infty}^{\infty} y f_0(y) dy + 0.52\int_{-\infty}^{\infty} y f_1(y) dy \\ &= 0.48(160) + 0.52(175) = 167,8\end{aligned}$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} y f_0(y)dy = \mathbb{E}(Z_0)$, y $\int_{-\infty}^{\infty} y f_1(y)dy = \mathbb{E}(Z_1)$.
Análogamente, podemos calcular

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= 28243,28 - (167,8)^2 = 86,44, \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy \\ &= 0.48 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_0(y)dy + 0.52 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_1(y)dy \\ &= 12305,28 + 15938, \end{aligned}$$

dónde

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_0(y)dy = \mathbb{E}(Z_0^2) = \mathrm{V}(Z_0) + \mathbb{E}(Z_0)^2 = 36 + (160)^2 = 25636$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_1(y)dy = \mathbb{E}(Z_1^2) = \mathrm{V}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_1)^2 = 25 + (175)^2 = 30650.$$